4. Exercices et corrigés

. N°28p.304

Dans une classe de 35 élèves, le club théâtre (T) compte 10 élèves et la chorale (C) 12 élèves. Dix-huit élèves ne participent à aucune de ces activités. On interroge au hasard un élève de cette classe.
Quelle est la probabilité que cet élève :

(a) appartienne au club théâtre ou à la chorale ?

(b) appartienne au club théâtre et à la chorale ?

. Corrigé du N°28p.304

L'univers est l'ensemble E des élèves de la classe. Il y a équiprobabilité.
a) L'événement $\overline{T \cup C}$ s'énonce "l'élève n'appartient ni au club théâtre ni à la chorale" ; il contient 18 élèves.
Donc l'événement contraire $T \cup C$ contient 35-18=17, donc $P(T \cup C) = \frac{17}{35}$.
b) On a la formule (vue en seconde) : $P(T \cup C) = P(T) + P(C) - P(T \cap C)$. Il vient :
$P(T \cap C) = P(T) + P(C) - P(T \cup C)$
$P(T \cap C) = \frac{10}{35} + \frac{12}{35} - \frac{17}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

. N°30p.304

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires, toutes indiscernables au toucher.
1) On tire successivement, au hasard, trois boules sans remise. Quelles sont les probabilités des événements :
– A : "Le tirage ne contient aucune boule blanche"
– B : "le tirage contient une seule boule blanche"
– C : "Le tirage contient deux boules blanches"
2.a) Même question dans le cas d'un tirage avec remise.
2.b) A-t-on $P(A) + P(B) + P(C) = 1$? Pourquoi ?

. Corrigé du N°30p.304

1) L'univers contient $6 \times 5 \times 4 = 120$ tirages possibles. tous les tirages sont équiprobables.
Une issue favorable à A est du type : NNN.
Il y a 4 choix pour la première boule noire, 3 choix pour la deuxième, et 2 choix pour la troisième. $P(A) = \frac{4 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{5}$
Une issue favorable à B est du type : BNN ou NBN ou NNB.
Il y a 2 choix possibles pour la boule blanche, 4 choix pour la première boule noire et 3 choix pour la deuxième.
$P(B) = \frac{3 \times (2 \times 4 \times 3)}{6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{5}$.
Une issue favorable à C est du type BBN ou BNB ou NBB.
Il y a 2 choix pour la première boule blanche, et 1 choix pour la deuxième, enfin 4 choix pour la boule noire.
$P(C) = \frac{3 \times (2 \times 1 \times 4)}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{5}$.

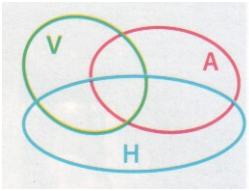
2.a) Dans le cas d'un tirage avec remise, l'univers contient $6 \times 6 \times 6 = 216$ issues, toutes équiprobables.
$P(A) = \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$
$P(B) = \frac{3 \times (2 \times 4^2)}{6^3} = \frac{4}{9}$
$P(C) = \frac{3 \times (2^2 \times 4)}{6^3} = \frac{2}{9}$
2.b) $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{26}{27}$. Cette somme est différente de 1. Lors d'un tirage avec remise, il peut aussi se produire l'éventualité D : "Le tirage contient trois boules blanches", avec $P(D) = \frac{2^3}{6^3} = \frac{1}{27}$.
Alors, $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$

. N°37p.306

Une compagnie d'assurance analyse les contrats souscrits par ses clients. Voici les résultats :
- 72% ont souscrit une assurance Habitation
- 54% ont souscrit une assurance Auto
- 30% ont souscrit une assurance Vie
- 7% ont souscrit les trois types d'assurance
- 25% ont souscrit exactement une assurance Auto et une assurance Habitation
- 31% ont souscrit uniquement une assurance Habitation
- 14% ont souscrit uniquement une assurance Auto

(Tous les clients ont souscrit au moins un contrat parmi les trois cités ci-dessus).

1) Sur un diagramme analogue au diagramme ci-contre, indiquez les différents pourcentages dans les zones qui conviennent.

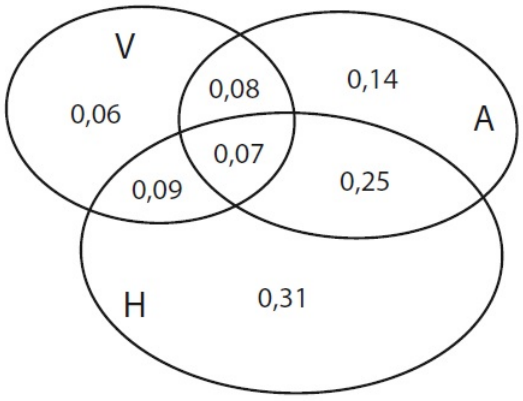


2) La compagnie envoie un courrier à un assuré choisi au hasard. On appelle H l'événement : "l'assuré a souscrit une assurance Habitation", V : "l'assuré a souscrit une assurance Vie", et A : "l'assuré a souscrit une assurance Auto". Identifiez, sur le diagramme, les événements suivants, et calculez leur probabilité.
a) $A \cap V \cap H$; $A \cap V$; $A \cup H$
b) $\overline{H} \cap A$; $\overline{H} \cap \overline{V}$
c) $\overline{A \cup H}$; $\overline{A \cup V}$

3) Décrivez, à l'aide des lettres A, V et H, les événements suivants, puis calculez leur probabilité.
- E : "L'assuré n'a pas souscrit d'assurance Vie, mais il a souscrit une assurance Habitation et une assurance Auto".
- F : "L'assuré a souscrit uniquement une assurance Auto"
- G : "L'assuré a souscrit exclusivement une assurance Auto et une assurance Vie".

. Corrigé du N°37p.306

1) Diagramme :



2) L'univers est l'ensemble des assurés. Il y a équiprobabilité.
2.a) $P(A \cap V \cap H) = 0,07$;
$P(A \cap V) = 0,07 + 0,08 = 0,15$;
$P(A \cup H) = 0,31 + 0,25 + 0,07 + 0,09 + 0,14 + 0,08 = 0,94$.
2.b) $P(\overline{H} \cap A) = 0,08 + 0,14 = 0,22$;
$P(\overline{H} \cap \overline{V}) = 0,14$.
2.c) $P(\overline{A \cup H}) = 1 - P(A \cup H) = 1 - 0,94 = 0,06$;
$P(\overline{A \cup V}) = 1 - P(A \cup V) = 1 - 0,69 = 0,31$.
3) $E = \overline{V} \cap A \cap H$, d'où $P(E) = 0,25$.
$F = A \cap \overline{H} \cap \overline{V}$, d'où $P(F) = 0,14$.
$G = A \cap V \cap \overline{H}$, d'où $P(G) = 0,08$.

. Exercices corrigés dans le livre, conseillés pour la préparation du contrôle

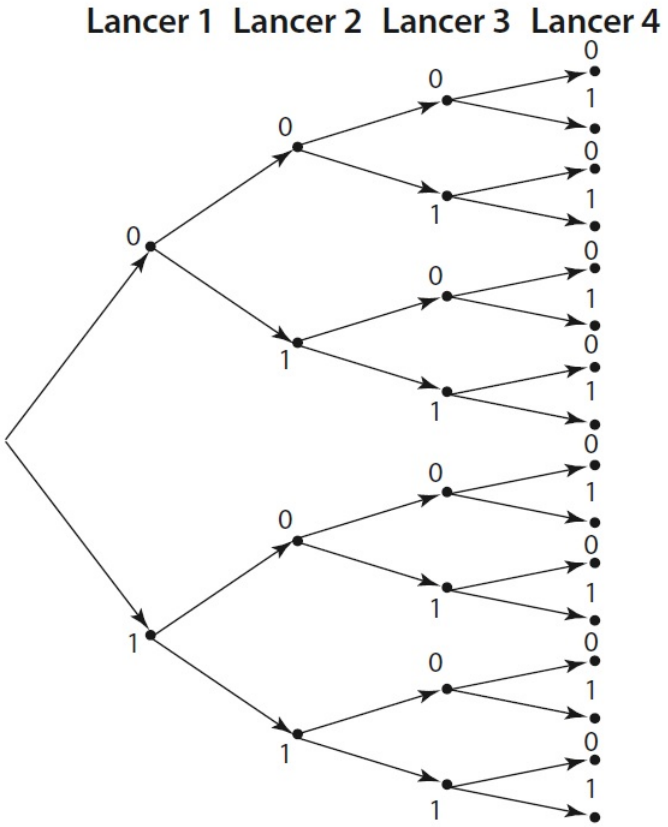
n°29 p.304, n°35 p.305.

. N°2p.296

On lance quatre fois une pièce de monnaie équilibrée. N est la variable aléatoire donnant le nombre de "face" obtenu. Déterminez la loi de probabilité de N.

. Corrigé du N°2p.296

1) On code "1" la sortie "Face" et "0" la sortie "Pile". L'univers est l'ensemble des quadruplets (*liste de 4 nombres dans laquelle "l'ordre compte"*) formés de 0 et de 1. toutes les issues sont équiprobables.
On peut dessiner un arbre de probabilités :

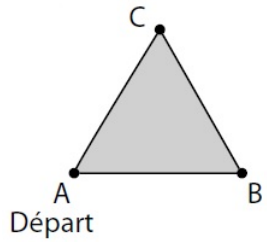


N prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.
Le nombre de sorties "face" associé à une issue est le nombre de "1" dans l'écriture du quadruplet. Par exemple si l'on a obtenu Pile-Face-Face-Face, le quadruplet est (0 ;1 ;1 ;1), et dans ce cas, N prend la valeur 3 car il le chiffre "1" est écrite 3 fois dans le quadruplet.
On obtient ainsi la loi de N :

n_i	0	1	2	3	4
$P(N = n_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

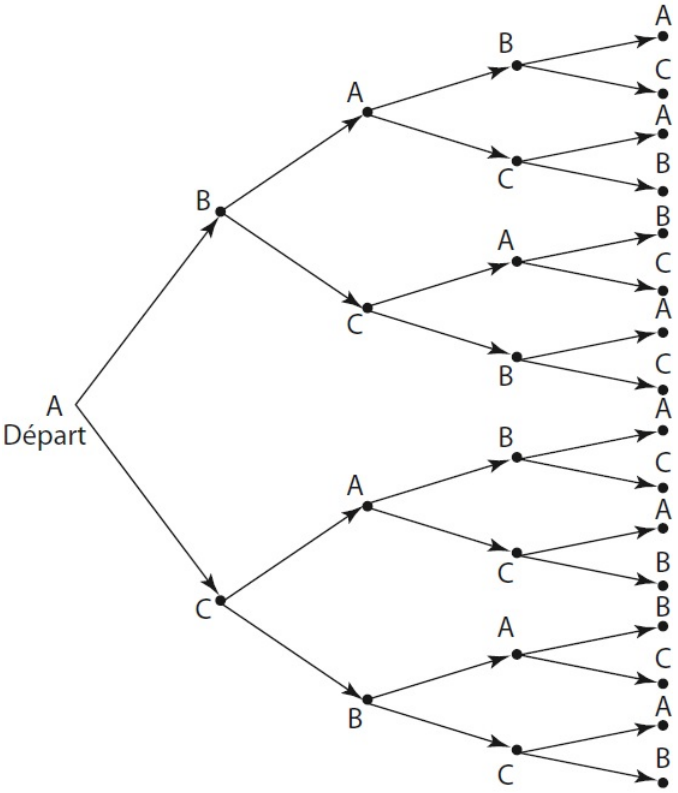
. N°3p.296

Un mobile se déplace sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC. A chaque sommet, il choisit sa direction au hasard. Parti de A, il effectue quatre déplacements. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de passages en A, départ non compris. déterminez la loi de probabilité de X.



. Corrigé du N°3p.296

1) On peut faire un arbre de probabilités. Toutes les issues (chemins) sont équiprobables.



X prend les valeurs 0, 1, 2.
La loi de X est :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$

On pourra s'aider pour les exercices suivants du "mode d'emploi des calculatrices" fourni à la page 302 du livre.

. N°6p.297

Aymeric a oublié le code du cadenas de son ordinateur. Ce code est constitué de quatre chiffres entre 0 et 9. Il ne se souvient que du premier : 2. Il essaie au hasard une combinaison commençant par 2. X désigne la variable aléatoire indiquant le nombre de chiffres bien placés (premier chiffre compris).
1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Calculez $E(X)$ et $V(X)$.

. Corrigé du N°6p.297

1) Une issue est un quadruplet de chiffres dont le premier est 2. Voici l'allure d'une issue :

2	• 10 choix	• 10 choix	• 10 choix

L'univers contient donc $10 \times 10 \times 10 = 1000$ issues équiprobables.
X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 (le premier chiffre de la combinaison est connu, donc il est toujours bien placé).
- L'événement "X=4" contient une seule issue : c'est "la bonne combinaison".
- L'événement "X=1" contient des issues du type :

2	• 9 choix	• 9 choix	• 9 choix

Dans ce cas, seul le chiffre 2 est correct. Il y a 9 possibilités pour chaque case, car il y a 9 nombres qui ne sont "pas le bon nombre"pour les autres chiffres de la combinaison.
Il y a donc $9 \times 9 \times 9 = 729$ issues favorables à cet événement.
- L'événement "X=2" contient des issues du type :

2	* *1 choix*	• 9 choix	• 9 choix
2	• 9 choix	* *1 choix*	• 9 choix
2	• 9 choix	• 9 choix	* *1 choix*

Il y a donc 243 issues favorables à cet événement.
- L'événement "X=3" contient des issues du type :

2	* *1 choix*	* *1 choix*	• 9 choix
2	* *1 choix*	• 9 choix	* *1 choix*
2	• 9 choix	* *1 choix*	* *1 choix*

Il y a donc 27 issues favorables à cet événement.

La loi de X est donc :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,729	0,243	0,027	0,001

2) $E(X) = 1,3$ et $\sigma(X) \simeq 0,52$.

. N°41p.306

Dans une enveloppe, on place cinq jetons indiscernables portant les numéros -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2.
On tire au hasard un jeton. A chaque jeton, on associe le carré du numéro tiré.
On définit ainsi une variable aléatoire C.
1) Quelle est la loi de probabilité de C ?
2) Calculez l'espérance et la variance de C.

. Corrigé du N°41p.306

1) L'univers est $E = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Toutes les issues sont équiprobables.
Loi de C :

k	0	1	4
$P(C = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

2) $E(C) = 2$; $V(C) = \frac{14}{5} = 2,8$.

. N°44p.307

La production journalière de tiges filetées d'un atelier de mécanique est indiquée dans le tableau ci-dessous où l désigne la longueur et d désigne le diamètre, exprimés en mm.

l \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

On choisit au hasard une tige pour effectuer un test de conformité. L est la variable aléatoire qui indique la longueur de la tige et D, celle qui indique son diamètre.
1) Donnez la loi de probabilité de D.
2) Donnez la loi de probabilité de L.
3) La tige est usinée de nouveau (événements noté U) si l'événement $\ll L > 85,5$ et $D > 16 \gg$ est réalisé.
La tige est envoyée au rebut (événement noté R) si l'événement $\ll D > 15,9$ ou $L > 84,5 \gg$ n'est pas réalisé.
Calculez P(U) et P(R).

. Corrigé du N°44p.307

1) L'univers est l'ensemble de la production des tiges filetées. Toutes les issues sont équiprobables.
Loi de D :

d en mm	15,8	16	16,1	16,3
$P(D = d)$	$\frac{38}{140} = \frac{19}{70}$	$\frac{41}{140}$	$\frac{45}{140} = \frac{9}{28}$	$\frac{16}{140} = \frac{4}{35}$

2) Loi de L :

l en mm	84	85	86	87
$P(L = l)$	$\frac{20}{140} = \frac{1}{7}$	$\frac{59}{140}$	$\frac{37}{140}$	$\frac{24}{140} = \frac{6}{35}$

3) $P(U) = \frac{30}{140} = \frac{3}{14}$ et $P(R) = \frac{5}{140} = \frac{1}{28}$.

. N°47p.307

Patrick, patron d'un chalutier, fait une sortie sur sa zone de pêche. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons.
On note B et S les événements suivants :
– B : « Il y a un banc de poissons sur sa zone »
– S : « Le sonar détecte la présence de poissons »
Une étude statistique sur les sorties dans cette zone et sur la fiabilité du sonar a permis d'établir que :
$P(B) = 0,7$ $P(S) = 0,575$ $P(B \cap S) = 0,56$

1.a) dans le tableau de probabilités ci-contre :
– La probabilité de B est indiquée en bout de ligne ;
– La probabilité de S est indiquée en bas de colonne

	S	$\overline{S}$	
B	0,56		0,7
$\overline{B}$			
	0,575		1

– à l'intersection de la ligne B et de la colonne S, on indique la probabilité de $B \cap S$.
Pour chaque ligne et chaque colonne, la case blanche est la somme des cases grises.
Complétez ce tableau.
1.b) Énoncez l'événement $\overline{B} \cap S$ et donnez sa probabilité.

2) Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve dans l'une des situations ci-dessous :
– Situation 1 : un banc est présent et le sonar le détecte, le filet est lancé et la pêche est fructueuse. dans ce cas, le gain est estimé à 2000€.
– Situation 2 : il n'y a pas de banc de poissons, mais le sonar en signale un. Le filet est lancé pour rien. Dans ce cas, on estime la perte à 400€.
– Situation 3 : Le sonar ne détecte rien. Le bateau rentre à quai et on estime la perte à 150€.
X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique (positif ou négatif) pour une sortie en mer.
a) Donnez la loi de probabilité de X.
b) Patrick effectue de nombreuses sorties ; quel gain moyen peut-il espérer par sortie ?

. Corrigé du N°47p.307

1) tableau de probabilités :

	S	$\overline{S}$	
B	0,56	0,14	0,7
$\overline{B}$	0,015	0,285	0,3
	0,575	0,425	1

2) $\overline{B} \cap S$ signifie "il n'y a pas, sur zone, de banc de poissons mais le sonar en a détecté un".
$P(\overline{B} \cap S) = 0,015$
3.a) Loi de probabilité de X :

x_i	-150	-400	2000
$P(X = x_i)$	0,425	0,015	0,56

3.b) Le gain moyen par sortie correspond à $E(X) = 1050,25e$.

. Exercices corrigés dans le livre, conseillés pour la préparation du contrôle

n°43 p.306, n°46 p.307

. N°7p.298

Une salle de spectacles propose pour la saison une carte d'adhérent au prix de 100 €. Elle donne alors droit à un tarif unique de 15€ pour chacun de ses spectacles. Une étude statistique a montré que parmi les abonnés, 9% ont assisté à quatre spectacles, 12% à cinq, 36% à six, 18% à sept et le reste à huit spectacles.
On interroge au hasard un abonné sur le nombre de spectacles N auquel il a assisté.
1) Donnez la loi de probabilité de la variable aléatoire N, puis calculez $E(N)$.
2) On note S la variable aléatoire indiquant la somme déboursée par un abonné par saison.

(a) Quelle relation lie S et N ?

(b) Sur quelle dépense moyenne par abonné peut compter le directeur de la salle ?

. Corrigé du N°7p.298

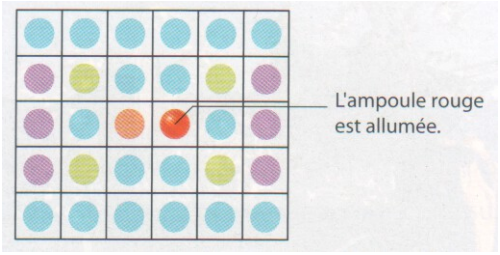
1) L'univers est l'ensemble des abonnés. Il y a équiprobabilité.
Loi de N :

k	4	5	6	7	8
$P(N=k)$	0,09	0,12	0,36	0,18	0,25

On trouve $P(N=8)$ en cherchant le complément à 1 de la somme des autres probabilités.
$E(N) = 6,38$.
2.a) $S = 15N + 100$.
2.b) La dépense moyenne par abonné attendue est $E(S)$.
$E(S) = E(15N + 100) = 15E(S) + 100 = 195,70$€.

. N°48p.308

Un jeu de hasard est constitué d'un dispositif allumant de façon aléatoire une case, et une seule, d'un tableau lumineux dont les ampoules sont rouges (R), vertes (V), bleues (B) ou violettes (I).



L'exploitant donne au client un jeton, servant à actionner le mécanisme, dont il peut fixer à sa guise la valeur a en euros. Le joueur gagne 80€ si le rouge clignote, 50€ si c'est le vert, rien du tout s'il s'agit du violet, et perd 10 fois la valeur du jeton si c'est le bleu. X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros du joueur pour une partie.
1) Trouvez la loi de probabilité de X.
2.a) Calculez a pour que le jeu soit équitable.
2.b) Comment l'exploitant a-t-il intérêt à fixer la valeur a du jeton ?

. Corrigé du N°48p.308

1) Loi de X :

k	80	50	0	$-10a$
$P(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

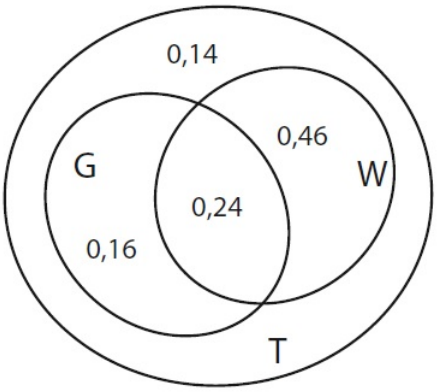
On ne soustrait pas le "coût" du jeton des gains ou pertes éventuels, car le jeton est donné par l'exploitant ; il ne coûte donc rien au joueur.
2.a) $E(X) = 12 - 6a$
$E(X) = 0 \Leftrightarrow a = 2$.
Ainsi le jeu est équitable lorsque la valeur du jeton est 2€.
2.b) L'exploitant a intérêt à fixer $a > 2$; ainsi, $E(X) < 0$ et le jeu lui sera favorable.

. N°50p.308

Une marque de téléphone portable propose deux options sur ses appareils, le GPS (noté G) et le wifi (noté W). Sur l'ensemble de sa gamme, 40% des téléphones possèdent l'option G, 70% l'option W et 24% les deux à la fois. On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque. On suppose que tous les appareils ont la même probabilité d'être choisis.
1.a) Calculez $P(G \cup W)$.
1.b) Déduisez-en la probabilité qu'un téléphone n'ait aucune des deux options.
2) Pour le fabricant, le coût de revient par téléphone de l'option G est de 12€, et celle de l'option W de 6€. On note X la variable aléatoire qui indique ce coût par appareil.
2.a) Déterminez la loi de probabilité de X.
2.b) Calculez $E(X)$.
2.c) Déduisez-en une estimation du coût de revient total de l'équipement de 200 000 appareils dans les mêmes conditions.

. Corrigé du N°50p.308

1.a) Schéma de la situation :



$P(G \cup W) = P(G) + P(W) - P(G \cap W)$
$P(G \cup W) = 0,4 + 0,7 - 0,24 = 0,86$
1.b) "Le téléphone n'a aucune des deux options" est l'événement $\overline{G \cup W}$, et $P(\overline{G \cup W}) = 0,14$.
2.a) Loi de X :

x_i	0	6	12	18
$P(X = x_i)$	0,14	0,46	0,16	0,24

2.b) $E(X) = 9$€.
2.c) On note Y la variable aléatoire qui donne le coût total d'équipement. $Y = 200.000X$.
D'où $E(Y) = 200.000 \times E(X) = 1.800.000$€.
Ainsi, en moyenne, le coût de revient total peut être estimé à 1,8 million d'euros.

. Exercice corrigé dans le livre, conseillé pour la préparation du contrôle

n°52 p.309